23. Сколько существует 10-значных чисел, в десятичной записи которых нет цифр, отличных от 1, 2 и 3, и у которых любые две соседние цифры отличаются на 1?

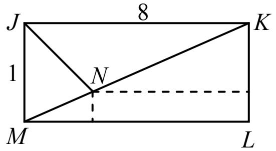
А) 16; **Б)** 32; **В)** 64; **Г)** 80; **Д)** 100.

24. Сколько существует натуральных $n \ge 3$, для которых можно построить выпуклый n-угольник, углы которого относятся как $1:2:...:n$?

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 5; **Д)** более 5.

25. В олимпиаде по математике приняло участие 55 школьников. При проверке работ жюри отметило каждую задачу либо символом «+» (задача решена правильно), либо символом «–» (задача решена неправильно), либо числом 0 (решение отсутствует). Позже выяснилось, что никакие две работы не имеют одинакового числа символов «+» и одинакового числа символов «–». Какое наименьшее число задач могло быть предложено на этой олимпиаде?

А) 6; **Б)** 9; **В)** 10; **Г)** 11; **Д)** 12.



26. В прямоугольнике *JKLM* биссектриса угла *KJM* пересекает диагональ *MK* в точке *N*. Расстояния от *N* до сторон *ML* и *KL* равны соответственно 1 и 8. Найдите длину *LM*.

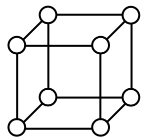
А) $8+2\sqrt{2}$; **Б)** $11+\sqrt{2}$; **В)** 10; **Г)** $8+3\sqrt{2}$; **Д)** $11+0,5\sqrt{2}$.

27. Если $k=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$, то сколько различных значений может принимать k?

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** 6.

28. На какое наименьшее число групп можно разбить числа 1, 2, 3, …, 99 так, чтобы выполнялись два условия: 1) в каждой группе имеется не менее двух чисел; 2) сумма никаких двух чисел из одной и той же группы не делится на 3?

А) 3; **Б)** 9; **В)** 33; **Г)** 34; **Д)** 66.



29. В каждой вершине куба записано по числу. Для каждой грани этого куба Петя подсчитал сумму четырех чисел, записанных в ее вершинах. Пять из полученных им сумм оказались равны 8, 10, 11, 12 и 13. Какое из следующих значений может принимать шестая сумма?

А) 9; **Б)** 10; **В)** 11; **Г)** 12; **Д)** 14.

30. Последовательность натуральных чисел a_n удовлетворяет условиям: $a_0=1$, $a_1=2$, $a_{n+2}=a_n+(a_{n+1})^2$ для $n \ge 0$. Найдите остаток от деления a_{2009} на 7.

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 5; **Д)** 6.

Конкурс организован и проводится Общественным объединением «Белорусская ассоциация «Конкурс» совместно с Академией последипломного образования при поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

220013, г. Минск, ул. Дорошевича, 3, РЗШ АПО
тел. (017) 292 80 31, 292 34 01; e-mail: info@bakonkurs.org
http://www.bakonkurs.org/

ОО «Белорусская ассоциация «Конкурс». Заказ 22. Тираж 4000 экз. Минск. 2009

Международный математический конкурс
«КЕНГУРУ-2009»

Четверг, 19 марта 2009 г.

- продолжительность непосредственной работы над заданием 1 час 15 минут;
- пользоваться калькулятором запрещается;
- в каждой задаче среди приведенных ответов только один правильный;
- по правилам конкурса на старте каждый участник получает 30 баллов;
- за правильный ответ на задачу к баллам участника прибавляются баллы, в которые оценена эта задача;
- за неправильный ответ на задачу из баллов участника вычитается четверть баллов, в которые эта задача оценена;
- за задачу, оставшуюся без ответа, баллы не прибавляются и не вычитаются;
- максимальное количество баллов, которые может получить участник конкурса, — 150;
- после окончания конкурса листок с заданием остается у участника;
- самостоятельная и честная работа над заданием — главное требование организаторов к участникам конкурса

Задание для учащихся 11 классов

Задачи с 1 по 10 оцениваются по 3 балла

1. В аквариуме 200 рыбок, среди них 1% – синие, остальные – красные. Сколько красных рыбок нужно вынуть из аквариума, чтобы число синих рыбок стало равным 2% от числа всех оставшихся в аквариуме рыбок?

А) 2; **Б)** 4; **В)** 20; **Г)** 50; **Д)** 100.

2. Какое из следующих чисел наибольшее?

А) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$; **Б)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; **В)** $\sqrt{4}-\sqrt{3}$; **Г)** $\sqrt{5}-\sqrt{4}$; **Д)** $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

3. Сколько существует натуральных чисел n таких, что число n^2+n является простым?

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** конечное число, большее 2; **Д)** бесконечно много.

4. Маша, Вера и Оля посетили кафе. Каждая из девочек заказала по 3 стакана апельсинового сока, по 2 пломбира и по 5 бисквитов. Какое из следующих чисел может быть суммой (в рублях), которую им вместе нужно будет уплатить?

А) 39200; **Б)** 38200; **В)** 37200; **Г)** 36200; **Д)** 35200.

5. В равенстве $K+A+N+G+A+R+O+O=56$ цифры заменены буквами (разные цифры – разными буквами, одинаковые цифры – одинаковыми буквами). Найдите сумму $A+O$.

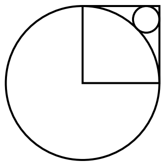
А) 18; **Б)** 17; **В)** 16; **Г)** 15; **Д)** однозначно определить нельзя.

6. Две окружности радиуса 13 и радиуса 15 пересекаются в точках P и Q, расстояние между которыми равно 24. Какое из следующих чисел может быть расстоянием между центрами этих окружностей?

А) 2; **Б)** 5; **В)** 9; **Г)** 14; **Д)** 18.

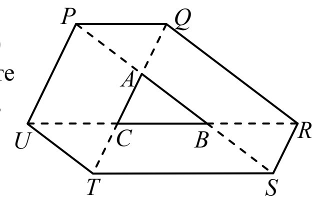
7. В коробке находятся 2 белых, 3 красных и 4 синих носка. Лиза знает, что треть носков – дырявые. Какое наименьшее число носков она должна вытащить из коробки не глядя, чтобы из них наверняка можно было составить нормальную пару (2 одноцветных не дырявых носка)?

А) 2; **Б)** 3; **В)** 6; **Г)** 7; **Д)** 8.



8. Центр окружности радиуса 1 находится в вершине квадрата со стороной 1. Меньшая окружность касается данной окружности и двух сторон квадрата так, как показано на рисунке. Найдите радиус меньшей окружности.

А) $\sqrt{2}-1$; **Б)** $0{,}25$; **В)** $0{,}25\cdot\sqrt{2}$; **Г)** $1-0{,}5\cdot\sqrt{2}$; **Д)** $(1-\sqrt{2})^2$.



9. Стороны треугольника ABC продлены в обе стороны (см. рис.) так, что $PA = BS = AB$, $TC = AQ = CA$ и $UC = BR = CB$. Найдите площадь шестиугольника $PQRSTU$, если известно, что площадь треугольника ABC равна 1.

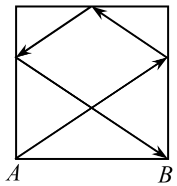
А) 9; **Б)** 10; **В)** 12; **Г)** 13; **Д)** 15.

10. Клетки таблицы 5 × 5 нужно окрасить в четыре цвета P, Q, R и S так, чтобы соседние (по стороне или вершине) клетки были окрашены в разные цвета. Шесть клеток уже окрашены так, как показано на рисунке. В какой цвет может быть окрашена клетка, отмеченная символом «*»?

P	*Q*			
R	*S*			
		Q		
				*
Q				

А) только P или Q; **Б)** только R; **В)** только S; **Г)** только R или S; **Д)** любой из P, Q, R, S.

Задачи с 11 по 20 оцениваются по 4 балла



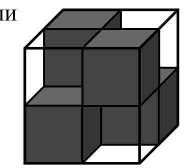
11. Бильярдный стол имеет форму квадрата со стороной 2 м. Шар, запущенный из угла A, отразившись три раза от разных сторон стола (см. рис.) попал в угол B. Найдите длину пройденного шаром пути.
(*Напоминаем, что угол падения равен углу отражения.*)

А) 7 м; **Б)** $2\sqrt{13}$ м; **В)** 8 м; **Г)** $4\sqrt{3}$ м; **Д)** $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ м.

12. 2009 кенгуру, светлых и темных, решили сравнить свой рост. Оказалось, что ровно 1 светлый кенгуру выше ровно 8 темных кенгуру, ровно 1 светлый кенгуру выше ровно 9 темных кенгуру, ровно 1 светлый кенгуру выше ровно 10 темных кенгуру, и т. д., наконец, ровно 1 светлый кенгуру выше всех темных кенгуру. Сколько среди них светлых кенгуру?

А) 1000; **Б)** 1001; **В)** 1002; **Г)** 1003; **Д)** описанная ситуация невозможна.

13. Куб $2\times2\times2$ на рисунке построен из четырех прозрачных и четырех черных непрозрачных кубиков 1 × 1 × 1. Эти кубики расположены так, что данный куб полностью не прозрачен по направлению, перпендикулярному любой его грани (т. е. если посмотреть на любую грань, перпендикулярно ей, то нельзя увидеть никакую точку противоположной грани). Какое наименьшее число непрозрачных кубиков 1 × 1 × 1 необходимо, чтобы построить такой же непрозрачный куб $3\times3\times3$?



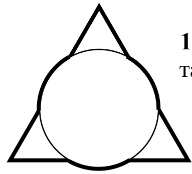
А) 6; **Б)** 9; **В)** 10; **Г)** 12; **Д)** 18.

14. Найдите последнюю цифру числа $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots-2008^2+2009^2$.

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** 5.

15. 25 знакомых между собой людей, лжецов и правдивых, стоят в очереди друг за другом. Каждый, кроме первого, сказал, что перед ним стоит лжец. А первый в очереди сказал, что все, кто стоит позади него, – лжецы. Сколько лжецов в очереди?

А) 0; **Б)** 12; **В)** 13; **Г)** 24; **Д)** невозможно определить.

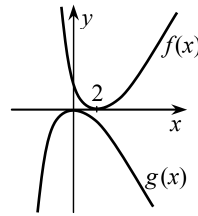


16. Круг радиуса 1 наложили на равносторонний треугольник со стороной 3 так, что центр круга совпал с центром треугольника. Найдите периметр полученной фигуры (т. е. длину жирной линии).

А) $3+2\pi$; **Б)** $6+\pi$; **В)** $9+\pi/3$; **Г)** 3π; **Д)** $9+\pi$.

17. Известно, что графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ (см. рис.) совмещаются наложением. Определите зависимость между этими функциями.

А) $g(x) = f(x+2)$; **Б)** $g(x-2) = -f(x)$; **В)** $g(x) = -f(2-x)$; **Г)** $g(-x) = -f(-x-2)$; **Д)** $g(2-x) = f(x)$.



18. На математической олимпиаде, в которой участвовало 100 школьников, были предложены 4 задачи. 90 участников решили первую задачу, 85 участников – вторую, 80 участников – третью, 70 участников – четвертую. Какое наименьшее число участников олимпиады могло решить все 4 задачи?

А) 10; **Б)** 15; **В)** 20; **Г)** 25; **Д)** 30.

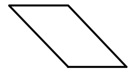


Рис. 1

19. На рисунках 1 и 2 приведены соответственно вид сверху и вид спереди некоторого тела. Какой вид слева имеет это тело?

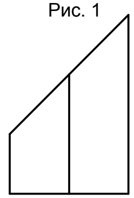
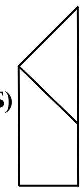
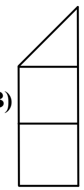
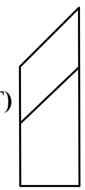


Рис. 2

А)  **Б)**  **В)**  **Г)**  **Д)** другой ответ.

20. В каждую клетку таблицы 3 × 3 вписано по числу. Оказалось, что суммы чисел во всех строчках, всех столбцах и на двух диагоналях – одинаковые. Два из вписанных чисел указаны на рисунке. Найдите число a.

a		
		47
	63	

А) 16; **Б)** 51; **В)** 54; **Г)** 55; **Д)** 110.

Задачи с 21 по 30 оцениваются по 5 баллов

21. Вася и Петя бегут по круговой дорожке с постоянными скоростями в одном направлении. Вася, скорость которого больше, чем скорость Пети, пробегает один круг за 3 минуты и догоняет Петю через каждые 8 минут. За какое время пробегает один круг Петя?

А) 6 мин; **Б)** 8 мин; **В)** 4 мин 30 сек; **Г)** 4 мин 48 сек; **Д)** 4 мин 20 сек.

22. Пусть z – количество 8-значных чисел, у каждого из которых все цифры различны и не равны 0. Тогда среди них количество чисел, которые делятся на 9, равно

А) $z/8$; **Б)** $z/3$; **В)** $z/9$; **Г)** $(8z)/9$; **Д)** $(7z)/9$.